

Capítulo 7

Tensões higrotérmicas

Até o Capítulo 6 consideramos o comportamento mecânico de placas e vigas laminadas sem levar em conta os efeitos de umidade e temperatura. Isto significa considerar que o conteúdo de umidade presente no laminado e sua temperatura na situação de trabalho são os mesmos existentes durante o processo de cura. Entretanto, quando esses fatores são diferentes desenvolvem-se distribuições de tensões e deformações residuais nas lâminas, que se sobrepõem às tensões mecanicamente impostas. Neste capítulo consideramos esses efeitos, estudando primeiramente a situação mais simples de uma viga laminada sob efeito térmico e em seguida detalhando os efeitos higrotérmicos numa placa.

7.1 Deflexão em vigas bimateriais sob efeito térmico

Considere uma viga formada por várias lâminas isotrópicas ou ortotrópicas com as direções principais alinhadas aos eixos xy como mostrado na Figura 7.1, engastada numa das extremidades e com espessura total H . A primeira lâmina tem módulo de elasticidade na direção x de valor E_1 , espessura h_1 e coeficiente de dilatação térmica α_1 . Para a lâmina 2, simplesmente temos E_2, h_2, α_2 , e assim por diante para cada uma das demais N lâminas. Quando o laminado tem apenas duas lâminas, ambas metálicas, tem-se o chamado **bimetal**. Note que, apesar do título da seção, a formulação apresentada a seguir não se restringe a duas lâminas. O caso bilaminar é referido em alguns pontos apenas para facilitar a exposição do material.

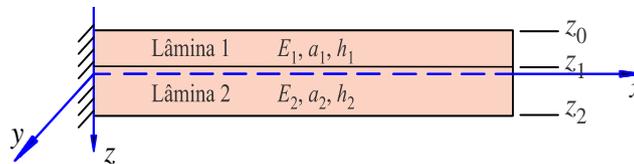


Figura 7.1: Viga composta por lâminas isotrópicas.

Consideremos que, em seu processo de fabricação, a viga tenha sido curada a uma temperatura de cura \mathcal{T}_0 , em sua configuração reta mostrada na figura. Caso a viga seja submetida a uma temperatura de trabalho \mathcal{T} diferente de \mathcal{T}_0 , ela sofrerá, de forma geral, dois tipos de deformações: extensão, isto é, uma variação de comprimento, e flexão. Para obter as expressões referentes aos deslocamentos, usa-se a teoria de vigas de Bernoulli (sem cisalhamento transversal, i.e., com a rotação da normal idêntica à rotação de superfície de referência). Identificamos a superfície de referência como a superfície média da viga, e instalamos aí os eixos x e y . Supomos, por simplicidade, que a seção seja retangular.

Definiremos as funções de deslocamento na viga da mesma forma que no resto do texto, isto é:

- $u^\circ(x)$ é o deslocamento na direção x de um ponto genérico situado sobre a superfície de referência, isto é, na superfície $z = 0$, e
- $w(x)$ é o deslocamento transversal.

Como visto na Figura 7.2, o deslocamento axial de um ponto genérico C é dado por:

$$u(x, z) = u^o(x) - \frac{\partial w(x)}{\partial x} z. \quad (7.1)$$

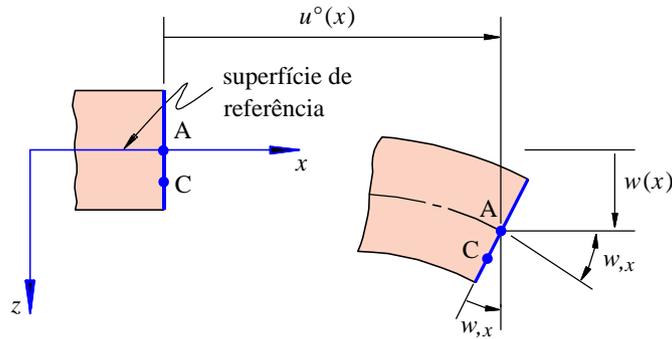


Figura 7.2: Deslocamento de um ponto genérico C numa viga.

A deformação e a tensão nesse ponto são:

$$\varepsilon_x(x, z) = u_{,x}^o(x) - w_{,xx}(x) z \quad \text{e} \quad \sigma_x(x, z) = E \varepsilon_x(x, z). \quad (7.2)$$

O esforço normal N_v e o de momento fletor M_v são relacionados à tensão normal por:

$$\{N_v; M_v\} = b \int_{z=-H/2}^{H/2} \sigma_x \{1; z\} dz. \quad (7.3)$$

O esforço normal numa seção é então:

$$N_v(x) = b \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_x(x, z) dz, \quad (7.4)$$

onde N é o número de lâminas, e z_k é a cota da superfície superior da lâmina k , como mostrado na Figura 6.4, com $z_0 = -H/2$ e $z_N = H/2$. Substituindo a expressão da tensão, temos:

$$N_v(x) = b \frac{\partial u^o(x)}{\partial x} \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_k dz - b \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_k z dz. \quad (7.5)$$

Fazendo a integração, obtém-se:

$$N_v(x) = A_v \frac{\partial u^o(x)}{\partial x} - B_v \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}, \quad (7.6)$$

onde A_v e B_v são as constantes de rigidez da viga, dadas por

$$\boxed{A_v = b \sum_{k=1}^N E_k h_k, \quad B_v = b \sum_{k=1}^N E_k h_k \bar{z}_k} \quad (7.7)$$

e \bar{z}_k é a coordenada da superfície média da lâmina k .

Para o momento fletor o cálculo é semelhante:

$$M(x) = b \frac{\partial u^o(x)}{\partial x} \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_k z dz - b \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_k z^2 dz, \quad (7.8)$$

o que resulta em

$$M_v(x) = B_v \frac{\partial u^o(x)}{\partial x} - D_v \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}, \quad (7.9)$$

onde D_v é a constante de rigidez flexural da viga, dada por

$$D_v = b \sum E_k \left[h_k \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right] \quad (7.10)$$

Esses resultados podem ser sumarizados em forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} N_v \\ M_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ B_v & D_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x}^o \\ -w_{,xx} \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

ou, em sua forma inversa,

$$\begin{Bmatrix} u_{,x}^o \\ -w_{,xx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_v D_v - B_v^2} \begin{bmatrix} D_v & -B_v \\ -B_v & A_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_v \\ M_v \end{Bmatrix}. \quad (7.12)$$

7.1.1 Efeito térmico na viga

A equação (7.12) considera apenas os efeitos de forças mecânicas nas tensões e deformações. Para simplificar a exposição consideremos agora apenas o efeito térmico. Ainda para simplificar, consideremos momentaneamente que a viga reage apenas com extensão à diferença de temperatura ΔT . A Figura 7.3a mostra a viga na temperatura inicial T_0 , em sua configuração indeformada e livre de deformações ou tensões residuais.

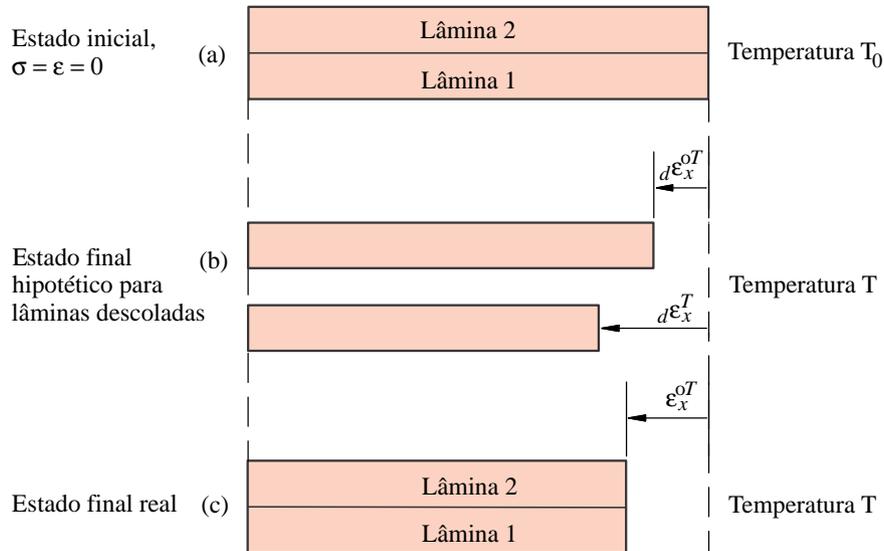


Figura 7.3: Deformações térmicas numa viga laminada (mostrada apenas a deformação axial).

Se as lâminas estivessem desacopladas umas das outras e sofressem uma variação de temperatura ΔT , como na Figura 7.3b, cada uma delas sofreria uma deformação dada por

$$d\epsilon_x^{T,l_k} = \alpha_k (\mathcal{T} - T_0) = \alpha_k \Delta T, \quad (7.13)$$

onde k indica o número da lâmina e d indica que essa deformação ocorre na lâmina desacoplada das demais. Sem dúvida, uma vez que as lâminas estão de fato coladas, essas deformações não se realizarão completamente, mas a seção da viga como um todo se deformará de um valor intermediário, ϵ_x^{oT} , como na Figura 7.3c. A maneira de obter esse estado de deformação é indireta. Considera-se a tensão hipotética necessária para produzir a deformação em cada lâmina indicada no estado (b):

$$d\sigma_x^{T,l_k} = E_k d\epsilon_x^{T,l_k} = E_k \alpha_k \Delta T. \quad (7.14)$$

$$\begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ B_v & D_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x}^{oT} \\ -w_{,xx}^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ B_v & D_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{oT} \\ \kappa_x^T \end{Bmatrix}, \quad (7.20)$$

onde u^{oT} e w^T são as componentes de deslocamentos axial e transversal da viga associados ao incremento de temperatura, enquanto ε_x^{oT} e κ_x^T são a deformação extensional de membrana e a curvatura da superfície de referência; ε_x^{oT} é a deformação mostrada esquematicamente na Figura 7.3c. Note que, para simplificar a representação do desenho, nesta figura não mostramos o efeito de flexão na viga, que seria representado por κ_x .

Podemos usar a inversa de (7.20) para explicitar as deformações:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{oT} \\ \kappa_x^T \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_v D_v - B_v^2} \begin{bmatrix} D_v & -B_v \\ -B_v & A_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix}. \quad (7.21)$$

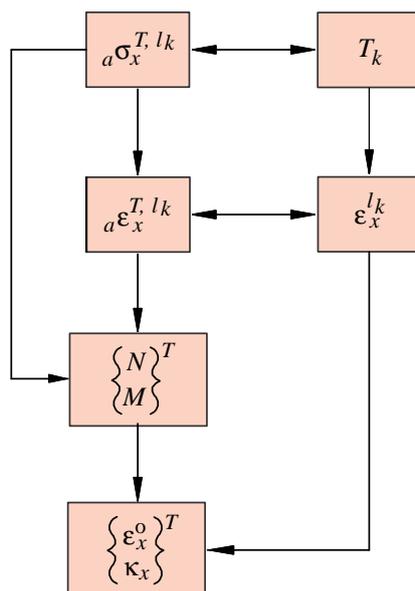


Figura 7.5: Equivalência do efeito da temperatura T_k em cada lâmina k com a tensão $\sigma_x^{T,lk}$, e obtenção da deformação e da tensão térmica.

Essas manipulações podem ser interpretadas da seguinte forma: podemos considerar que a deformação $d\varepsilon_x^{T,lk}$ em cada lâmina teria sido causada não por um diferencial térmico, mas por um carregamento mecânico dado por $d\sigma_x^{T,lk} = E d\varepsilon_x^{T,lk}$. A Figura 7.5 ajuda a entender essa equivalência. As forças associadas a essas tensões podem ser somadas em todas as lâminas. Porém, isto é o que é feito com os esforços da eq.(7.20). A deformação média associada à força axial e ao momento fletor na viga é dada na expressão (7.21). ε_x^{oT} é então a deformação constante que, se multiplicada pela rigidez da viga, produz a força axial N^T associada às forças equivalentes aos efeitos que o incremento de temperatura exerce sobre cada lâmina tomada de forma desacoplada das demais.

Uma vez que o momento fletor é constante, o esforço cisalhante é nulo, e a teoria usada é válida mesmo que a viga não seja longa.

Devemos lembrar que a Figura 7.3c representa apenas a componente de membrana da deformação térmica da viga. Assim, a deformação aplicada em cada lâmina proveniente apenas de ΔT é diferente do ε_x^{oT} ilustrado. Levando-se também em conta a mudança de curvatura, a deformação é dada por

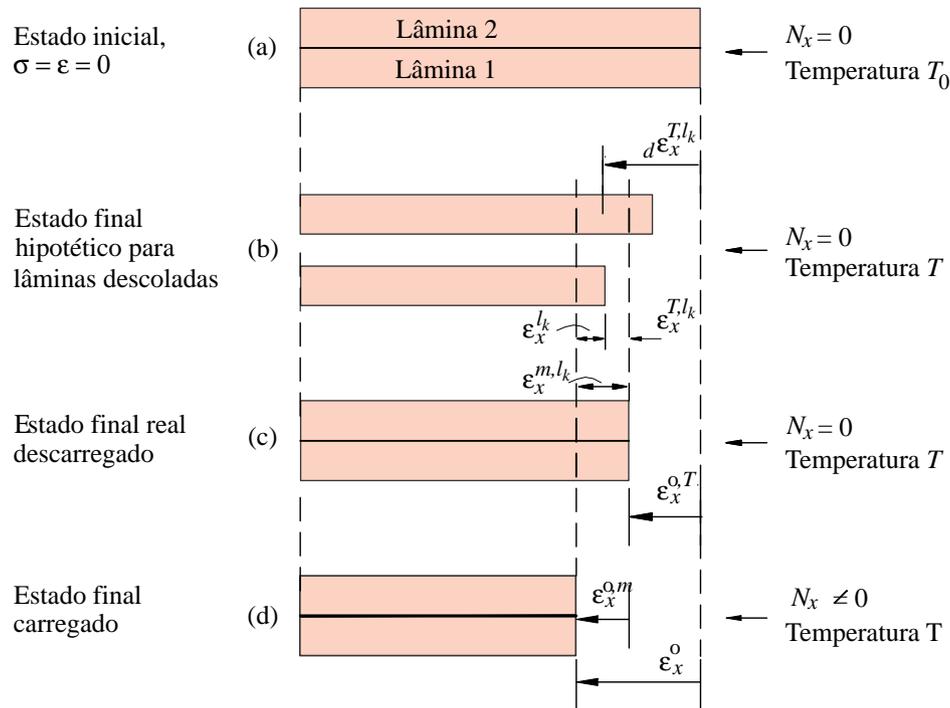


Figura 7.6: Deformações térmicas e mecânicas numa viga laminada. A flexão é ignorada para que se mantenha a clareza da figura, e são mostrados apenas os efeitos axiais.

$${}^t\varepsilon_x^{l,k}(z) = \varepsilon_x^o + z \kappa_x, \quad (7.26)$$

onde $z \in (z_{k-1}; z_k)$ é a cota de um ponto qualquer pertencente à lâmina k . Esta é a **deformação total** sofrida pela lâmina entre sua configuração inicial (pré-cura) e final, após a aplicação dos carregamentos térmicos e mecânicos. É o análogo a ε_x^o na Figura 7.6d.

A **deformação efetiva** em uma lâmina genérica é dada por

$$\varepsilon_x^{l,k}(z) = {}^t\varepsilon_x^{l,k}(z) - {}^d\varepsilon_x^{T,l,k}(z). \quad (7.27)$$

O último termo nesta expressão está definido na equação (7.13). Observe que essa deformação aparente pode variar ao longo da espessura da viga e da própria lâmina, bastando para isto que a temperatura de trabalho ou a de cura possua um gradiente ao longo de z . Nesse caso, $\Delta T = \Delta T(z)$ e

$${}^d\varepsilon_x^{T,l,k}(z) = \alpha_k [T(z) - T_0] = \alpha_k \Delta T(z). \quad (7.28)$$

A deformação efetiva em (7.27) pode novamente ser entendida com relação à Figura 7.4. A tensão efetiva associada é então simplesmente dada por

$$\sigma_x^{l,k}(z) = E_k \varepsilon_x^{l,k}(z). \quad (7.29)$$

Esta é a tensão que, se excedida, pode ativar algum modo de falha por ruptura na lâmina k . Lembremos que parte dela se deve ao carregamento mecânico aplicado e às tensões residuais térmicas.

As parcelas de deformação e de tensão presentes, provenientes unicamente das interações térmicas entre as lâminas, são dadas pelas eqs.(7.22)–(7.24). Assim, as tensões mecânicas são:

$$\sigma_x^{ml,k}(z) = \sigma_x^{l,k}(z) - \varepsilon_x^{T,l,k}(z). \quad (7.30)$$

forma espiral. Isso porque o aumento de comprimento total, mesmo num componente de dimensões compactas, permite aumentar a deflexão obtida para um mesmo ΔT , resultando numa maior resolução do transdutor.

7.1.5 Exemplo 2 – Tensões em bimetal

Consideramos agora a viga em balanço do exemplo anterior submetida a um momento fletor M aplicado na extremidade livre. Adicionalmente, ela trabalha sob um diferencial de temperatura ΔT uniforme em relação à temperatura de cura T_0 . Obtenha expressões para as deflexões e tensões.

Solução:

Devemos apenas adicionar à solução térmica já obtida no problema anterior uma nova parcela de solução proveniente do momento. Então,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{o,m} \\ \kappa_x^m \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_v D_v - B_v^2} \begin{bmatrix} D_v & -B_v \\ -B_v & A_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ M_v \end{Bmatrix} = \frac{M}{A_v D_v - B_v^2} \begin{Bmatrix} -B_v \\ A_v \end{Bmatrix}.$$

Uma vez que essas deformações independem de x , os deslocamentos podem ser integrados com as condições de contorno $u^{o,m}(0) = w^m(0) = 0$, resultando em:

$$u^{o,m}(x) = -\frac{B_v M_v}{A_v D_v - B_v^2} x, \quad w^m(x) = \frac{A_v M_v}{A_v D_v - B_v^2} x^2.$$

Esta seria a solução, não fosse pela influência da temperatura. Neste caso, sobrepondo (7.32) temos a solução

$$\begin{aligned} u^o(x) &= u^{o,m}(x) + u^{oT}(x) = \frac{DN^T - B(M^T + M_v)}{AD - B^2} x, \\ w(x) &= w^m(x) + w^T(x) = \frac{A(M^T + M_v) - BN^T}{AD - B^2} x^2. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Esta é a deflexão medida a partir da configuração de cura da viga.

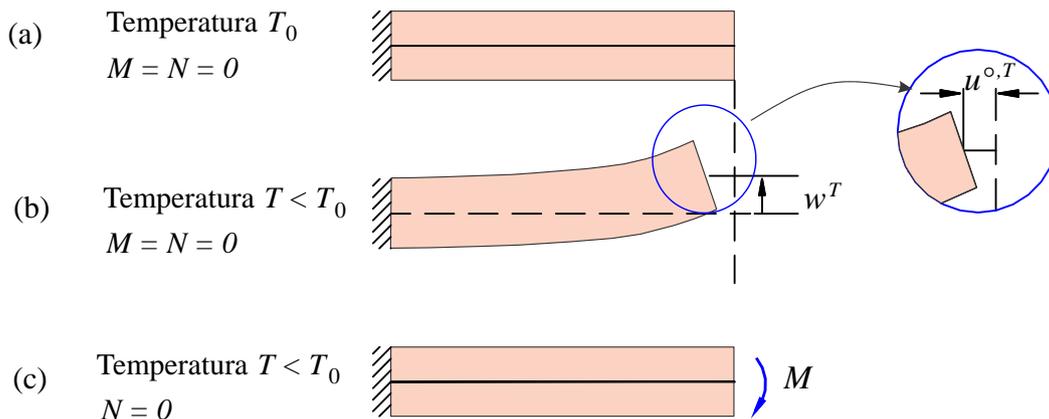


Figura 7.7: Viga pré-deformada do Exemplo 2.

Uma observação interessante surge dessas equações: pode-se projetar e construir uma viga laminada que apresente uma forma levemente curvada em temperatura de trabalho previamente à aplicação de carga externa. Essa curvatura pode ser projetada de tal forma que a viga apresente deflexão nula quando sob a ação de um determinado nível de carregamento. A vantagem neste procedimento está no custo do processo de fabricação, que utilizaria moldes planos para produzir lâminas como na Figura 7.7a, que são mais baratos que os curvos. O custo do processo é então transferido da etapa de fabricação às de projeto e de cálculo, que são geralmente mais baratas.

Tomando a equação (7.38), pode-se conseguir deflexão nula em todos os pontos fazendo

Um fato surpreendente pode ser observado destes resultados: para um laminado simétrico de lâminas de espessuras idênticas, o nível de tensões térmicas desenvolvido independe da espessura do laminado.

7.2 Tensões térmicas em painéis laminados

Nas seções anteriores, consideramos o comportamento térmico de vigas laminadas. Nesta seção os conceitos lá discutidos serão estendidos à situação de laminados bidimensionais do tipo placa ou cascas sob a ação de uma temperatura de trabalho diferente da temperatura de cura. Esta seção é, portanto, a complementação do Capítulo 6, onde analisou-se o comportamento de laminados sob a ação de esforços mecânicos. Assim, começamos por considerar as relações tensão-deformação termoelásticas lineares tridimensionais de um elemento diferencial, em forma indicial:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j + \alpha_i\Delta\mathcal{T}, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (7.41)$$

Sua forma aberta para um material ortotrópico, nas suas direções principais, é mostrada em (4.10). A relação inversa toma a forma:

$$\sigma_i = C_{ij}(\varepsilon_j - \alpha_i\Delta\mathcal{T}), \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad (7.42)$$

onde ε_i é a deformação total, soma da deformação mecânica $S_{ij}\sigma_j$ com a deformação térmica $\alpha_i\Delta\mathcal{T}$; α_i é o coeficiente de dilatação térmica, e $\Delta\mathcal{T}$ a diferença de temperatura. Note que $C_{ij}\alpha_i\Delta\mathcal{T}$ na eq.(7.42) só representa tensão efetivamente desenvolvida no ponto caso a deformação total do ponto, ε_i , seja nula, isto é, caso a região se encontre totalmente restringida à deformação.

Para o caso particular de uma lâmina ortotrópica, no sistema principal de coordenadas, as tensões mecânicas são, de acordo com a relação (4.29),

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1\Delta\mathcal{T} \\ \varepsilon_2 - \alpha_2\Delta\mathcal{T} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (7.43)$$

Tomando a k -ésima lâmina do laminado e transformando as coordenadas dessa equação para um sistema x - y - z orientado segundo um ângulo θ , conforme a Seção 4.3, temos

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} = \overline{\mathbf{Q}}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x\Delta\mathcal{T} \\ \varepsilon_y - \alpha_y\Delta\mathcal{T} \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy}\Delta\mathcal{T} \end{Bmatrix}^{l_k}. \quad (7.44)$$

Nota-se na eq.(7.43) que a diferença de temperatura gera apenas as deformações térmicas extensionais $\varepsilon_1^T = \alpha_1\Delta\mathcal{T}$ e $\varepsilon_2^T = \alpha_2\Delta\mathcal{T}$ nas direções principais de coordenadas, enquanto num outro sistema qualquer se desenvolvem deformações cisalhantes térmicas dadas por $\gamma_{xy}^T = \alpha_{xy}\Delta\mathcal{T}$.

Os novos coeficientes de dilatação térmica α_x , α_y e α_{xy} podem ser obtidos a partir de valores de α_1 e α_2 da maneira descrita a seguir. Primeiramente, verificamos que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{x/2T} = T^{-1}\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^{1T}, \quad (7.45)$$

onde o sobrescrito \mathcal{T} indica “térmico”, e \mathbf{T} , \mathbf{R} e $\boldsymbol{\varepsilon}^{x/2}$ foram definidas na Seção 4.3, página 80. Por definição dos coeficientes de dilatação térmica, no sistema principal as deformações são:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{1T} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta\mathcal{T}, \quad (7.46)$$

enquanto num sistema cartesiano de coordenadas arbitrário supomos a existência de coeficientes α_x , α_y e α_{xy} , que definem deformações térmicas pelas rotações das deformações principais (7.46), da seguinte

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z) = {}_t\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z) - {}_d\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z), \quad (7.58)$$

onde o último termo é composto pelas deformações térmicas que a lâmina sofreria se estivesse desacoplada das demais:

$${}_d\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{array} \right\}^{l_k} \Delta T. \quad (7.59)$$

Os coeficientes de dilatação da lâmina α_x , α_y e α_{xy} são obtidos de (7.50).

As tensões térmicas ou residuais na lâmina são (analogamente à eq.(7.24), de vigas):

$$\boldsymbol{\sigma}^{xT,l_k}(z) = \overline{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z), \quad (7.60)$$

que são componentes no sistema x - y de eixos e devem obviamente ser transformadas ao sistema principal antes da aplicação em um critério de falhas para verificação da segurança do laminado sob de ação das tensões residuais.

7.2.2 Tensões mecânicas e efetivas nas lâminas

A deformação total num ponto de uma lâmina genérica sob a ação de carregamento mecânico, medida em relação à configuração em temperatura de cura, é (analogamente à eq.(7.26), para vigas):

$${}_t\boldsymbol{\varepsilon}^{xl_k} = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z_k \boldsymbol{\kappa}, \quad (7.61)$$

onde as deformações generalizadas à direita da igualdade são obtidas resolvendo (7.51) para valores dados de \mathbf{N} , \mathbf{M} , \mathbf{N}^T , \mathbf{M}^T e \mathbf{C} .

A **deformação efetiva** em uma lâmina genérica é (similarmente à eq.(7.27), para vigas):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{xl_k}(z) = {}_t\boldsymbol{\varepsilon}^{xl_k}(z) - {}_d\boldsymbol{\varepsilon}^{xT,l_k}(z). \quad (7.62)$$

As **tensões mecânicas** numa lâmina genérica são obtidas por

$$\boldsymbol{\sigma}^{xl_k}(z) = \overline{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{xl_k}(z). \quad (7.63)$$

Estas componentes devem ser rotacionadas ao sistema principal de coordenadas, e aplicadas então em um critério de falhas. Lembramos que parte dos valores obtidos são provenientes do carregamento mecânico aplicado e parte constituem tensões térmicas residuais.

As **tensões mecânicas** são obtidas por

$$\boldsymbol{\sigma}^{xml_k}(z) = \boldsymbol{\sigma}^{xl_k}(z) - \boldsymbol{\sigma}^{xT,l_k}(z), \quad (7.64)$$

e as tensões térmicas à direita vêm de (7.60).

7.3 Cargas de ruptura do laminado

O procedimento de cálculo necessário a uma estimativa do carregamento máximo de um composto laminado está sintetizado no fluxograma das Tabela 7.1. Esse fluxograma é uma generalização do processo de cálculo mostrado no Capítulo 6, Tabela 6.1, página 153, mas aqui incluem-se três diferentes aspectos:

- esforços iniciais $\{\mathbf{N}_0; \mathbf{M}_0\}$;
- comportamento térmico;
- comportamento higroscópico.

As Figuras 7.9 e 7.10 ilustram os pontos característicos dos diagramas tensão-deformação estimados. Observe que essas figuras são extensões das Figuras 6.21, modificadas para incluir os efeitos

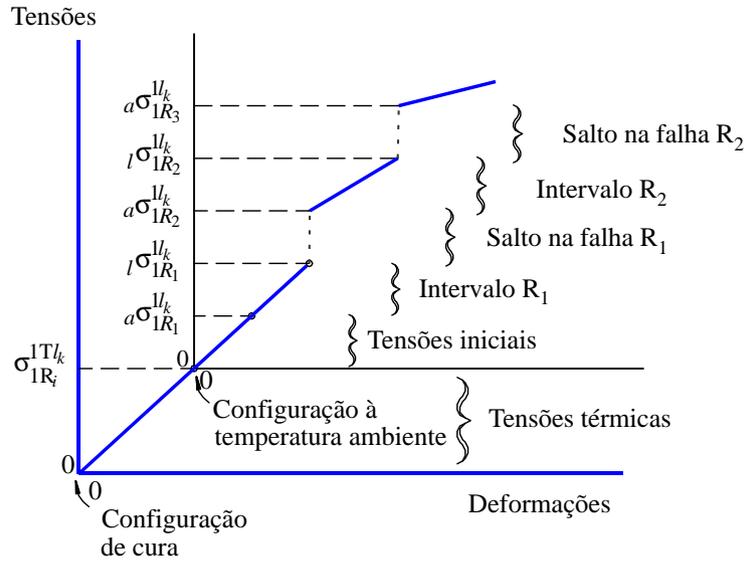


Figura 7.10: Pontos característicos de um diagrama tensão-deformação típico, incluindo carregamento inicial e térmico.

Tabela 7.1 - Fluxograma de análise de resistência num ponto de um laminado.

1.	$\left\{ \begin{array}{l} \{\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{M}}\}, \{\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0\}, \\ N, h_k, \mathcal{T}, \Delta\mathcal{T} \\ E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \\ X_t, X_c, Y_t, Y_c, S \end{array} \right\}$	Dados
2.	$R_i: \quad i = 1$	Contador de cargas de falha
3.	Do $k = 1, N$	
4.	$\mathbf{Q}_{R_i}^k \longrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k \longrightarrow \mathbf{C}_{R_i}$	Rigidez inicial
5.	Do $k = 1, N$	
6.	$\alpha_{R_i}^{xl_k}$	Rotaciona coeficientes de dilatação térmica, eq.(7.48)
7.	$\mathbf{N}_{R_i}^T = \mathbf{N}_{R_i}^T + \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k \varepsilon_{R_i}^{xl_k} \Delta\bar{\mathcal{T}}^k h_k$	Esforços térmicos
8.	$\mathbf{M}_{R_i}^T = \mathbf{M}_{R_i}^T + \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k \varepsilon_{R_i}^{xl_k} \Delta\bar{\mathcal{T}}^k h_k \bar{z}_k$	
9.	$\left\{ \begin{array}{l} a\varepsilon^o \\ a\boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\}_{R_i} = \mathbf{C}_{R_i}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{array} \right\}$	Deformações generalizadas no início do intervalo
10.	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{oT} \\ \boldsymbol{\kappa}^T \end{array} \right\}_{R_i} = \mathbf{C}_{R_i}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{M}^T \end{array} \right\}_{R_i}$	Deformações generalizadas térmicas
11.	Do $k = 1, N$	Tensões e deformações mecânicas iniciais
12.	$a\varepsilon_{R_i}^{xl_k^i} = a\varepsilon_{R_i}^{o^i} + z_i a\boldsymbol{\kappa}_{R_i}$	
13.	$a\sigma_{R_i}^{xl_k^i} = \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k a\varepsilon_{R_i}^{xl_k^i}$	Tensões iniciais, direções xyz
14.	$a\sigma_{R_i}^{1l_k^i} = \mathbf{T}_k a\sigma_{R_i}^{xl_k^i}$	Tensões iniciais, direções 123
15.	$a\varepsilon_{R_i}^{1l_k^i} = \mathbf{T}_k^{-T} a\varepsilon_{R_i}^{xl_k^i}$	Deformações iniciais, direções 123
16.	Início do cálculo nos intervalos de falha	

17. Do $k = 1, N$
18. $t\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{xTl_k i} = \boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{oT} + z_i \mathbf{a} \boldsymbol{\kappa}_{R_i}^T$ Deformação térmica total, eq.(7.57)
19. $t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{xl_k i} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^o + z_i \mathbf{a} \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{R_i}$ Perfil de deformações (xyz)
20. $t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{1l_k i} = \mathbf{T}_k^{-t} t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{xl_k i}$ Perfil de deformações (123)
21. $t\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{1Tl_k i} = \mathbf{T}_k^{-t} t\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{1Tl_k i}$ Deformação térmica total (123)
22. $d\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{1Tl_k i} = \boldsymbol{\alpha}_{R_i}^{1l_k} \Delta T_{l_k i}$ Deformação térmica p/ lâminas desvinculadas, eq.(7.59)
23. $\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{1Tl_k i} = t\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{1Tl_k i} - d\boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{1Tl_k i}$ Deformação térmica real na lâmina
24. Se $\alpha_1 = 0 \rightarrow \varepsilon_1^{1Tl_k i} = 0$ Depura componentes de deformação térmica
25. Se $\alpha_2 = 0 \rightarrow \varepsilon_2^{1Tl_k i} = 0$ devido a falhas anteriores
26. $\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{1Tl_k i} = \mathbf{Q}_{R_i}^k \boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{1Tl_k i}$ Tensões térmicas (123)
27. $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}^{1l_k i} = \mathbf{Q}_{R_i}^k \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{1l_k i}$ Perfil de tensões
28. $l\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{1l_k i} = a\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{1l_k i} + \boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{1Tl_k i} + C_{R_i}^{l_k i} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}^{1l_k i}$ Tensões no limiar da falha R_i . Aplica critério de falha.
29. $C_{R_i}^{l_k i}$ e $C_{R_i}^{l_k s}$ Fatores de falha nas superfícies inferior e superior
30. $C_{R_i}^{l_k} = \min\{C_{R_i}^{l_k i}, C_{R_i}^{l_k s}\}$ Menor fator na lâmina k
31. $C_{R_i} = \min_{l_k}\{C_{R_i}^{l_1}, \dots, C_{R_i}^{l_k}, \dots, C_{R_i}^{l_N}\}$ Menor fator para falha do laminado
32. Se $C_{R_i} \leq 0 \rightarrow$ **Relatório, fim** Laminado não suporta acrescimo de carga
33. Do $k = 1, N$
34. $l\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{1l_k i} = a\boldsymbol{\sigma}_{R_i}^{1l_k i} + C_{R_i} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}^{1l_k i}$ Tensões no limiar da falha R_i para C_{R_i} dado
35. $a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_{i+1}}^{1l_k i} = a\boldsymbol{\varepsilon}_{R_{i+1}}^{1l_k i} + C_{R_i} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R_i}^{1l_k i}$ Deformações mecânicas no inicio do intervalo R_{i+1}
36. $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_{R_{i+1}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_{R_{i+1}} + C_{R_i} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{M}} \end{array} \right\}$ Esforços e deformações generalizadas
37. $\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\}_{R_{i+1}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\}_{R_{i+1}} + C_{R_i} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}} \end{array} \right\}$ no inicio do intervalo R_{i+1}
38. Se não há lâminas restantes \rightarrow **Relatório, fim**
38. $R_i: \quad i = 1$ Contador de cargas de falha. Inicio de outro intervalo.
40. Do $k = 1, N$
41. $\boldsymbol{\alpha}_{R_i}^{1l_k}, \mathbf{Q}_{R_i}^k, \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k, \mathbf{C}_{R_i}$ Recálculo, com eliminação de lâminas
42. $\mathbf{N}_{R_i}^T = \mathbf{M}_{R_i}^T = \mathbf{0}$
43. Do $k = 1, N$
44. $\boldsymbol{\alpha}_{R_i}^{xl_k}$ Rotaciona coeficientes de dilatação térmica, eq.(7.48)
45. $\mathbf{N}_{R_i}^T = \mathbf{N}_{R_i}^T + \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k \boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{xl_k} \Delta \bar{T}^k h_k$ Esforços térmicos
46. $\mathbf{M}_{R_i}^T = \mathbf{M}_{R_i}^T + \bar{\mathbf{Q}}_{R_i}^k \boldsymbol{\varepsilon}_{R_i}^{xl_k} \Delta \bar{T}^k h_k \bar{z}_k$
47. $\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^{oT} \\ \boldsymbol{\kappa}^T \end{array} \right\}_{R_i} = \mathbf{C}_{R_i}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{M}^T \end{array} \right\}_{R_i}$ Deformações generalizadas térmicas

$$48. \quad \left\{ \begin{array}{c} \Delta \varepsilon_f^o \\ \Delta \kappa_f \end{array} \right\}_{R_i} = \mathbf{C}_{R_i}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_{R_i}$$

48. Do $k = 1, N$

Corre apenas as lâminas remanescentes

$$50. \quad \Delta \varepsilon_{fR_i}^{xl_k^i} = \Delta \varepsilon_{fR_i}^o + z_i \Delta \kappa_{fR_i}$$

Direções xyz , superfície inferior da lâmina

7.3.1 Exemplo 4 – Resistência de laminado com efeitos térmicos

O procedimento de estimativa de resistência de um laminado, descrito neste capítulo e sumarizado no fluxograma da Tabela 7.1, é ilustrado por um laminado cruzado com as seguintes características. O laminado é simétrico, com $N = 3$ lâminas. As lâminas 1 e 3 estão orientadas a 0° com o eixo x e têm espessura $h_1 = h_3 = 0,0833$ mm, enquanto a lâmina 2 está a 90° e tem espessura $h_2 = 0,833$ mm. Assim, o coeficiente de espessuras M definido em (6.28) simplifica-se para $M = h_2/(h_1 + h_2) = 0,2$. As lâminas são de mesmo material, vidro-E/epóxi, com

$$\begin{array}{ll} E_1 = 53.742 \text{ MPa} & X_t = 1.034 \text{ MPa} \\ E_2 = 17.914 \text{ MPa} & X_c = 1.034 \text{ MPa} \\ \nu_{12} = 0,25 & Y_t = 27,6 \text{ MPa} \\ G_{12} = 8.957 \text{ MPa} & Y_c = 138 \text{ MPa} \\ \alpha_1 = 6,3 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} & S = 41,3 \text{ MPa} \\ \alpha_2 = 20,52 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} & \end{array}$$

O laminado encontra-se submetido a um esforço $\bar{N}_x = 1$ N/mm, sob uma temperatura de trabalho $\Delta T = 111,1^\circ\text{C}$ abaixo da temperatura de cura. Busca-se uma estimativa do máximo esforço N_x que o laminado pode suportar nessas condições.

Observe que os dados deste problema são os mesmos usados por Tsai em [206] e também de um problema desenvolvido por Jones [105], ambos no “sistema” inglês de unidades. É um problema interessante em razão de existirem resultados experimentais, obtidos por Tsai, que podem validar os resultados numéricos, e é esse o problema que escolhemos aqui para ilustrar o procedimento do cálculo.

Solução:

No Exemplo 10 do Capítulo 6, página 160, examinamos este mesmo problema, porém sem os efeitos térmicos. O leitor pode achar interessante rever a solução daquele antes de se lançar a este, e posteriormente fazer comparações sobre as similaridades e diferenças no processo de cálculo.

a) Primeiro intervalo de carga

As matrizes $\mathbf{Q}_{R_1}^{l_k}$ para as três lâminas são aquelas mostradas no Exemplo 9 do Capítulo 6. A matriz de rigidez extensional do laminado e sua inversa são mostradas naquele exemplo, mas são repetidas aqui:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 24,39 & 4,574 & 0 \\ 4,574 & 48,79 & 0 \\ 0 & 0 & 8,967 \end{bmatrix} 10^3, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4,173 & -0,3912 & 0 \\ -0,3912 & 2,086 & 0 \\ 0 & 0 & 11,15 \end{bmatrix} 10^{-5},$$

onde \mathbf{A} é dado em N/mm. As constantes de dilatação térmica nas direções x - y em cada lâmina são

$$\alpha^{xl_1} = \begin{Bmatrix} 6,30 \\ 20,52 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad \text{e} \quad \alpha^{xl_2} = \begin{Bmatrix} 20,52 \\ 6,30 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-6} / ^\circ\text{C}.$$

Os esforços térmicos são obtidos de (7.53) como:

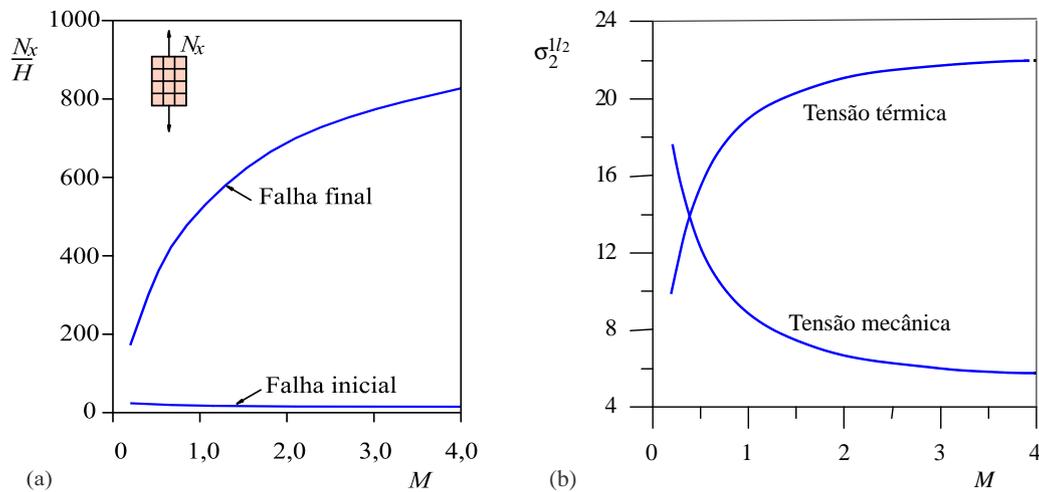


Figura 7.11: Diagramas $N_x \times \epsilon_x^o$ e $\sigma_1 \times \epsilon_1$ estimados para o laminado do Exemplo 4. N_x em N/mm, σ_1 em MPa e deformações multiplicadas por 10^{-3} .

nos cálculos porque, na etapa final de carregamento, temos em ambos os casos apenas as fibras das lâminas externas suportando todo o esforço. O laminado encontra-se já desagregado e a variação da temperatura não mais provoca uma redistribuição de tensões. A temperatura altera, porém, o valor final da deformação, bem como todos os demais valores intermediários do diagrama, isto é, as cargas de falha intermediárias.

O Exemplo 4 utilizou um laminado cruzado com coeficiente $M = 0,2$. (Lembramos que M é definido na eq.(6.28), página 132, e no presente caso toma o valor $M = 2h_1/h_2$.) Pode-se alterar as proporções entre as espessuras das lâminas e repetir os mesmos cálculos para diversos valores de M . Obtemos assim os resultados mostrados na Figura (7.12), onde temos os esforços N_x por unidade de espessura H do laminado, isto é, a tensão média na placa. Os valores para a falha final são os mesmos obtidos para o caso $\Delta T = 0$, mostrado na Figura 6.23a, página 163.

Comparando as Figuras 6.24 e 7.12a, notamos que, conforme M cresce, o valor da carga de falha inicial cresce para $\Delta T = 0$ e decresce quando ΔT é não-nulo, mostrando um efeito deletério das tensões térmicas. Conforme M cresce, as lâminas externas tornam-se mais espessas em relação à interna. Lembramos que ΔT é negativo, isto é, há resfriamento após o processo de cura. As lâminas, então, se contraem. Na direção x , a lâmina interna tende a se contrair mais que as externas, uma vez que o coeficiente de dilatação térmica da resina é maior que o da fibra, o que se traduz em $\alpha_2 > \alpha_1$. A restrição à livre contração da lâmina 2 imposta pela lâmina 1 é o que gera tensões térmicas nela. Quanto maior for a espessura das lâminas externas, isto é, maior M , maior será essa restrição imposta e maiores serão as tensões térmicas impostas na lâmina 2. Ainda, quanto maior for a tensão térmica $\sigma_{2R_1}^{Tl_2}$, menor o valor de tensão mecânica que se pode aplicar sobre ela até atingir sua resistência transversal Y_t , que neste caso é 27,6 MPa. As curvas da Figura 7.12b ilustram esse fenômeno claramente. Ali, a componente transversal da tensão térmica na lâmina 2 durante o primeiro intervalo de carga, $\sigma_{2R_1}^{1Tl_2}$, cresce com M . Simultaneamente, a tensão mecânica no limiar da primeira falha $\sigma_{2R_1}^{1l_2}$ decresce. Nota-se que as demais componentes de tensão quase não têm importância e $\sigma_{2R_1}^{1Tl_2} + \sigma_{2R_1}^{1l_2} \approx Y_t$.

7.4 Exercícios

7.1 Deduza as equações de tensões térmicas em vigas laminadas para o caso de lâminas com espessura variando linearmente ao longo de x .

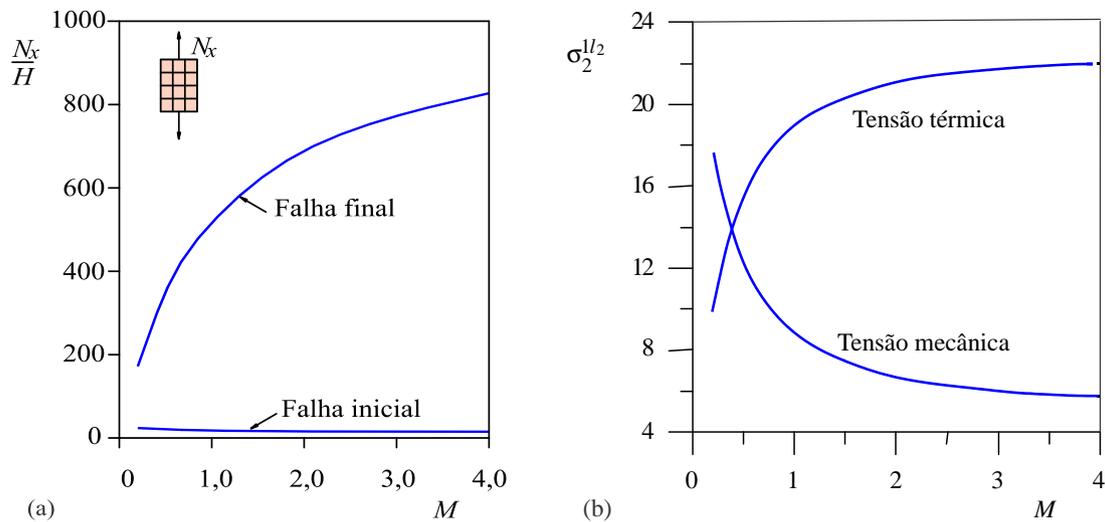


Figura 7.12: (a) Resistência de laminados cruzados em termos do coeficiente M . (b) Evolução das tensões térmicas e mecânicas em termos do parâmetro M para a lâmina 2 do Exemplo 4. N_x/H e tensão em MPa.

- 7.2 Determine a carga limite de ruptura do laminado do Exemplo 4, para o caso de três lâminas de espessuras idênticas, tal que $H = 1,0$ mm e temperatura de trabalho de $\Delta\mathcal{T} = 111,1^\circ\text{C}$ abaixo da temperatura de cura, uniformemente distribuída ao longo da espessura.
- 7.3 Determine a carga limite de ruptura do laminado do Exemplo 4 com temperatura de trabalho de $\Delta\mathcal{T}_m = 111,1^\circ\text{C}$ abaixo da temperatura de cura na superfície média, e uma diferença de temperatura entre a superfície superior e inferior de $\delta\mathcal{T} = 30^\circ\text{C}$, conforme ilustrado na Figura 7.8.
- 7.4 Resolva o Exercício 2 para um laminado angular de 3 lâminas idênticas com ângulos $\pm 30^\circ$.
- 7.5 Resolva o Exercício 3 para um laminado angular de 3 lâminas idênticas com ângulos $\pm 30^\circ$.